Corrigés chap. 7 CONSERVATION ENERGIE ET QUANTITE DE MOUVEMENT

Exercice 7.2 : Bilan des puissances réelles

Une balle élastique de rayon R et de masse m chute sous son propre poids à partir d'une hauteur H, s'écrase élastiquement sur le sol puis rebondit. On néglige tout frottement et on utilise un axe z vertical dirigé vers le bas (cf. figure 1). Lorsque la balle est en contact avec le sol, sa déformation élastique est approximée par le rapport z/R (z est alors positif).

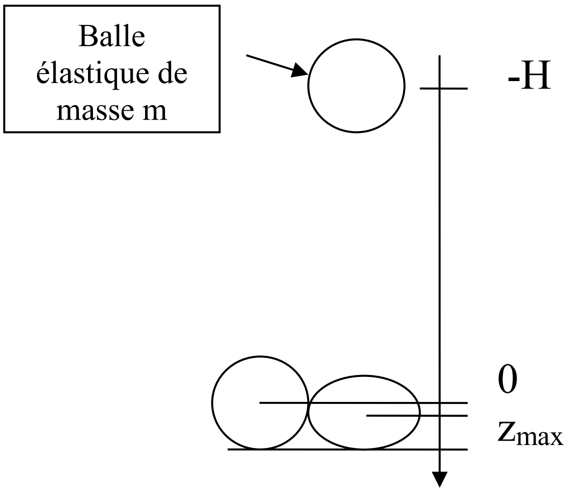

Figure 1 : Chute d'une balle élastique.

En détaillant chacun des termes du bilan des puissances réelles (éq.7.32 du cours), déterminer la quantité qui reste constante au cours du mouvement.

Le bilan des puissances donne l'équation suivante :

$$\int_\Omega \rho\vec{g}\cdot\vec{v}dV + \int_{\partial\Omega} \vec{t}\cdot\vec{v}dS = \frac{D}{Dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\rho v^2 dV + \int_\Omega \sigma : \dot{\varepsilon}dV \quad (1)$$

Le premier terme représente bien la puissance de la force de gravitation $\int_\Omega \rho\vec{g}\cdot\vec{v}dV = \vec{g}\cdot\vec{v}\int_\Omega \rho dV = mgv$ où v est la vitesse du centre de gravité de la balle qui ne se déforme pas avant de toucher le sol.

En cas d'absence de friction, le second terme est nul car il n'y a pas de résistance due à l'air lors de la chute et de plus au moment de l'impact avec le sol, la vitesse en surface de la balle est nulle (alors que la force de réaction ne l'est pas) $\int_{\partial\Omega} \vec{t}\cdot\vec{v}dS = 0$ autrement dit, la réaction du sol « ne travaille » pas.

Le troisième terme est le terme d'énergie cinétique et vaut :

$$\frac{D}{Dt}\int_\Omega \frac{1}{2}\rho v^2 dV = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}v^2\int_\Omega \rho dV\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Le quatrième terme représente la puissance due à la déformation élastique de la balle quand elle est en contact avec le sol avec $\dot{\varepsilon} = \frac{D\varepsilon}{Dt}$ et $\sigma = E\varepsilon$ (où E représente le module d'élasticité). Ce terme peut également s'écrire : $\int_\Omega \sigma : \dot{\varepsilon}dV = \int_\Omega E\varepsilon : \dot{\varepsilon}dV$

A l'aide de l'égalité $2\varepsilon : \dot{\varepsilon} = \frac{D}{Dt}\left(\varepsilon^2\right)$, nous obtenons :

$$\int_\Omega \sigma : \dot{\varepsilon} dV = \int_\Omega \frac{1}{2} E \frac{D}{Dt}\left(\varepsilon^2\right) dV = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_\Omega E dV\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}K\varepsilon^2\right)$$

En remplaçant les quatre termes par leur valeur calculée, il vient :

$$mgv - \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) - \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}K\varepsilon^2\right) = 0 \qquad (2)$$

En remplaçant v par $\frac{dz}{dt}$ et en intégrant par rapport à t, on obtient :

$$mgz - \left(\frac{1}{2}mv^2\right) - \left(\frac{1}{2}K\varepsilon^2\right) = Cte$$

Cela traduit la conservation de l'énergie totale du système : l'énergie de pesanteur se transforme en énergie cinétique (lors de la chute) et en énergie élastique lors du contact avec le sol.

Déterminer la variation de la vitesse lors de la chute libre de la balle, avant qu'elle ne touche le sol.

Avant que la balle ne touche le sol, le terme ($\frac{1}{2}K\varepsilon^2$) est nul, et à partir de l'équation (2), nous pouvons trouver la vitesse lors de la chute libre de la balle $mgv = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$, ce qui n'est rien d'autre que le théorème de l'énergie cinétique. En remplaçant v par $\frac{dz}{dt}$ et en intégrant par rapport à t, on obtient $mg\frac{dz}{dt} = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ soit $mg\Delta z = \frac{1}{2}m\left(v^2 - 0\right)$

Ainsi la vitesse de chute de la balle devient $v_0 = \sqrt{2gH}$ en z =0 i.e. au moment du contact avec le sol.

Déterminer l'équation constitutive décrivant les variations de l'énergie en fonction du temps lors de la compression de la balle en posant z = 0, la position du barycentre de la balle au premier contact avec le sol et $v = v_0$ sa vitesse. De plus, on supposera que la balle possède une raideur globale $K = \int_\Omega E dV$ où E représente son module d'élasticité.

Au début de la compression de la balle, z augmente alors que la vitesse v diminue, à partir de l'équation (2), nous avons: $mgv = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}K\varepsilon^2\right)$

À $z = 0$, on a $v = v_0$ et l'équation régissant le mouvement devient donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}K\varepsilon^2 - mgz = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Calculer la coordonnée $z_{\max}$ correspondant à la compression maximum de la balle.

Au moment de la compression maximale de la balle, $v=0$ et nous avons également $\varepsilon_{\max} = {z_{\max}}/{R}$, qui donne l'équation suivante du deuxième ordre à résoudre $\frac{1}{2}K\left({z_{\max}}/{R}\right)^2 - mg\left(z_{\max}\right) = \frac{1}{2}mv_0^2$. La solution positive est $z_{\max} = \frac{mgR^2}{K}\left(1+\sqrt{\left(1+\frac{Kv_0^2}{mg^2R^2}\right)}\right)$

Pour z tel que $0<z<z_{\max}$, le mouvement d'ascension de la balle doit satisfaire l'équation

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(\frac{z}{R}\right)^2 - mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \text{avec } \varepsilon = \frac{z}{R} \text{ et } v = \frac{dz}{dt}$$

La solution de cette équation différentielle non linéaire donnera le déplacement z en fonction du temps tant que la balle touche le sol.

Décrire qualitativement le mouvement d'ascension de la balle.

En négligeant les frottements, la balle rebondit après avoir touché le sol jusqu'à la position H. La séquence chute libre-rebond jusqu'à la position H est alors répétée indéfiniment.

Discuter de l'évolution du mouvement dans une situation réelle.

Dans une situation réelle où les frottements ne sont pas négligés, les forces de résistance de l'air (et aussi la friction de la balle avec le sol lors de sa déformation) vont peu à peu diminuer l'énergie totale de la balle et la hauteur de rebond H va tendre vers 0.

Exercice 7.8 : Fil conducteur parcouru par un courant, effet Joule

On considère un cylindre (rayon R et longueur L) métallique homogène encastré entre deux parois à température fixe T_0. Le cylindre étant parcouru par un courant constant d'intensité I, il s'échauffe par effet Joule. On note la résistance électrique du cylindre Re = ρL/S, S étant la section du cylindre et ρ sa résistivité électrique. La conductivité thermique est notée k en W/mK.

Le cylindre se refroidit en surface par convection avec l'air ambiant modélisée par un flux de chaleur $-k\frac{\partial T}{\partial r} = h(T-T_0)$ en r = R . On considère que ce flux est suffisamment petit pour que la température dans le cylindre reste monodimensionnelle axiale, i.e. T reste une fonction uniquement de z. Un bilan d'énergie sur une tranche dz (approximation de l'ailette) permet de montrer que la température T(z) en régime stationnaire est solution de l'équation : $k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - 2\frac{h(T-T_0)}{R} + q = 0$ ou q est la densité volumique de chaleur produite par effet Joule. On remarquera que T(z) est une fonction paire.

Quelle est l'unité de h ?

h est en W/m2K pour que le flux de chaleur soit en W/m2

On pose $a = \sqrt{\frac{kR}{2h}}$ une constante du problème. Quelle est l'unité de a ?

a est en m

Exprimer q en fonction des données du problème.

q est en W/m3 et vaut : q = $R_eI^2/\pi R^2L$

Quelles sont les conditions aux limites vérifiées par T(z) ?

T(L/2) = T(-L/2) = T0

Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle vérifiée par T(z)

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}-2\frac{h(T-T_0)}{R}+q=0, \quad \text{T = Cste, alors } 2\frac{h(T-T_0)}{R}=q \text{ soit } \mathrm{T = T_0 + qR/2h}$$

Chercher la solution de l'équation homogène sous la forme T(z)=αe^βz et exprimer β en fonction de a.

l'équation homogène est $\mathrm{k}\frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial \mathrm{z}^2} - 2\frac{\mathrm{hT}}{\mathrm{R}} = 0$

$\mathrm{T} = \alpha e^{\beta z}$, alors $\mathrm{k}\beta^2 = 2\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{R}}$ soit $\beta = \pm\sqrt{\frac{2\mathrm{h}}{\mathrm{kR}}} = \pm\frac{1}{a}$. Ainsi $\mathrm{T = T_0 + qR/2h + Ae^{-z/a} + Be^{z/a}}$

En déduire le profil de température dans le cylindre en régime stationnaire.

$\mathrm{T = T_0 + qR/2h + Ae^{-z/a} + Be^{z/a}}$

$\mathrm{T(\pm L/2) = T0}$ soit $\mathrm{0 = qR/2h + Ae^{-L/2a} + Be^{L/2a}}$ et $\mathrm{0 = qR/2h + Ae^{L/2a} + Be^{-L/2a}}$

$\mathrm{A = B = -qR/2h\left(e^{-L/2a} + e^{L/2a}\right) = -qR/4hch(L/2a)}$

et $\mathrm{T = T_0 + qR/2h - qRch(z/a)/2hch(L/2a) = T_0 + qR/2h\left(1 - ch(z/a)/ch(L/2a)\right)}$

Comment varie la température maximale lorsque le rayon du cylindre décroît ?

$\mathrm{T = T_0 + qR/2h\left(1 - ch(z/a)/ch(L/2a)\right)}$ est max en z = 0 et vaut $\mathrm{T_{max} = T_0 + qR/2h\left(1 - 1/ch(L/2a)\right)}$

Or $\mathrm{q = R_e I^2/\pi R^2 L = \rho I^2/\pi^2 R^4}$ donc $\mathrm{T_{max} = T_0 + \rho I^2/2\pi^2 R^3 h\left(1 - 1/ch(L/2a)\right)}$

$\mathrm{T_{max}}$ tend vers $\mathrm{T_0 + \rho I^2/2\pi^2 R^3 h}$ donc vers l'infini quand R tend vers 0.

C'est le principie du filament d'une ampoule

On suppose maintenant que la conductivité thermique du fil est infinie, ceci implique que la température est uniforme dans le fil. Pour traiter le cas transitoire, l'équation à résoudre devient $-2\frac{h(T-T_0)}{R}+q=\rho Cp\frac{\partial T}{\partial t}$ sachant que le fil est initialement à la température T0 et que le courant I est mis en circulation au temps t = 0.

$$-2\frac{h(T-T_0)}{R} + \mathrm{R_e I^2/\pi R^2 L} = \rho Cp\frac{\partial T}{\partial t}, \text{ on pose } \mathrm{u = T - T_0}, -2\frac{hu}{R} + \mathrm{R_e I^2/\pi R^2 L} = \rho Cp\frac{\partial u}{\partial t}$$

sol. particulière: $\mathrm{u} = T - T_0 = \mathrm{R_e I^2/2h\pi RL}$

equa. homogène: $\rho Cp\frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{hu}{R} = 0$, sol. homogène: $\mathrm{u = A\ e^{-t/\tau}}$ avec $\tau = \frac{\rho \mathrm{C_p R}}{2\mathrm{h}}$

sol.générale: $\mathrm{T - T_0 = R_e I^2/2h\pi RL + A\ e^{t/\tau}}$

$\mathrm{u=0}$ en t=0, soit $\mathrm{T = T_0 + R_e I^2\left(1 - e^{-t/\tau}\right)/2h\pi RL}$

Résoudre l'équation différentielle obtenue en faisant apparaître une constante de temps caractéristique $\tau = \frac{\rho \mathrm{C_p R}}{2\mathrm{h}}$.

Calculer la température du fil pour un temps infini, ceci toujours à intensité de courant imposé.

aux temps élevés, $\mathrm{T = T_0 + R_e I^2/2h\pi RL}$ qui tend vers l'infini quand R tend vers 0.